10. Παραγώγιση διανυσμάτων

10.1 Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

Αν οι συνιστώσες ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, έστω της t, δηλαδή αν $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, τότε το όριο

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} \tag{10.1}$$

ορίζεται ως η *παράγωγος του διανύσματος* $\vec{\mathbf{r}}$ *ως προς* t.

Συναρτήσει των Καρτεσιανών συνιστωσών του διανύσματος, είναι:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}}. \tag{10.2}$$

Ομοίως ορίζονται και ανώτερες παράγωγοι:

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{z}} \tag{10.3}$$

κλπ.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα μοναδιαία διανύσματα στο Καρτεσιανό σύστημα, ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) ή ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$), είναι σταθερά διανύσματα, όχι μόνο στο μέτρο όπως όλα τα μοναδιαία διανύσματα, αλλά και σε κατεύθυνση.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι παράγωγοι του διανύσματος $\vec{\mathbf{r}}(t) = (x_0\,\hat{\mathbf{x}} + y_0\,\hat{\mathbf{y}}) + \upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}gt^2\hat{\mathbf{z}}$ ως προς t, αν όλα τα άλλα μεγέθη είναι σταθερά. Επίσης να βρεθούν οι τιμές τους για $t = 0$.

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}(x_0\,\hat{\mathbf{x}} + y_0\,\hat{\mathbf{y}}) + \frac{d}{dt}(\upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}}) - \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}gt^2\,\hat{\mathbf{z}}) = \upsilon_0\,\hat{\mathbf{x}} - gt\hat{\mathbf{z}}$$

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}(\upsilon_0\,\hat{\mathbf{x}}) - \frac{d}{dt}(gt\hat{\mathbf{z}}) = -g\hat{\mathbf{z}}$$

Για $t = 0$ είναι:

$$\vec{\mathbf{r}}(0) = x_0\,\hat{\mathbf{x}} + y_0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \dot{\vec{\mathbf{r}}}(0) = \upsilon_0\,\hat{\mathbf{x}} \qquad \ddot{\vec{\mathbf{r}}}(0) = -g\hat{\mathbf{z}}.$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η παράγωγος ως προς το χρόνο, του εσωτερικού γινομένου $f(t) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

Αν είναι $\vec{\mathbf{A}}(t+\delta t) = \vec{\mathbf{A}} + \delta\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}(t+\delta t) = \vec{\mathbf{B}} + \delta\vec{\mathbf{B}}$, τότε

$$\delta f = f(t+\delta t) - f(t) = (\vec{\mathbf{A}} + \delta\vec{\mathbf{A}}) \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \delta\vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} \cdot \delta\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \delta\vec{\mathbf{A}} + \delta\vec{\mathbf{A}} \cdot \delta\vec{\mathbf{B}}$$

και

$$\frac{\delta(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}})}{\delta t} = \frac{\delta f}{\delta t} = \vec{\mathbf{A}} \cdot \frac{\delta\vec{\mathbf{B}}}{\delta t} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{\delta\vec{\mathbf{A}}}{\delta t} + \frac{\delta\vec{\mathbf{A}} \cdot \delta\vec{\mathbf{B}}}{\delta t}.$$

Στο όριο $\delta t \to 0$ έχουμε: $\quad \dfrac{d(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}})}{dt} = \vec{\mathbf{A}} \cdot \dfrac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \dfrac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}$.

10.2 Κανόνες παραγώγισης διανυσμάτων

Αν τα $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ και $\vec{\mathbf{C}}$ είναι παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις του t και η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t, τότε οι ακόλουθες σχέσεις μπορούν να αποδειχθούν:

1. $\dfrac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}) = \dfrac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}+\dfrac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$ 2. $\dfrac{d}{dt}(f\,\vec{\mathbf{A}}) = \dfrac{df}{dt}\,\vec{\mathbf{A}}+f\,\dfrac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}$

3. $\dfrac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}) = \dfrac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\cdot\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}\cdot\dfrac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$ 4. $\dfrac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}) = \dfrac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\times\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}\times\dfrac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$

5. $\dfrac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}) = \dfrac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}+\vec{\mathbf{A}}\cdot\dfrac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}\times\vec{\mathbf{C}}+\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\dfrac{d\vec{\mathbf{C}}}{dt}$

6. $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{\mathbf{A}}\times\left(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}\right)\right] = \dfrac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\times\left(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}\right)+\vec{\mathbf{A}}\times\left(\dfrac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}\times\vec{\mathbf{C}}\right)+\vec{\mathbf{A}}\times\left(\vec{\mathbf{B}}\times\dfrac{d\vec{\mathbf{C}}}{dt}\right)$

Ακριβώς αντίστοιχοι κανόνες παραγώγισης ισχύουν και για τις *μερικές παραγώγους* των διανυσματικών συναρτήσεων που είναι συναρτήσεις δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών. Για παράδειγμα, αν οι $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ είναι συναρτήσεις των x, y και z, είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}) = \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial x}\cdot\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial x}. \qquad (10.5)$$

Τα *διαφορικά* διανυσματικών παραστάσεων ευρίσκονται όπως αυτά των βαθμωτών:

1. Αν $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\,\hat{\mathbf{y}}+A_z\,\hat{\mathbf{z}}$, τότε $d\vec{\mathbf{A}} = dA_x\hat{\mathbf{x}}+dA_y\,\hat{\mathbf{y}}+dA_z\,\hat{\mathbf{z}}$

2. $d(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}) = d\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}\cdot d\vec{\mathbf{B}}$ 3. $d(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}) = d\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}\times d\vec{\mathbf{B}}$ (10.6)

4. Αν $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}(x,y,z)$, τότε $d\vec{\mathbf{A}} = \dfrac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial z}dz$

10.3 Διανυσματικές παράγωγοι στη Μηχανική

Αν (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες ενός κινούμενου σημείου P και t ο χρόνος, τότε το σημείο P έχει:

διάνυσμα θέσης $$\vec{\mathbf{r}} \equiv x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}+z\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (10.7)$$

διανυσματική ταχύτητα $$\vec{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}}+\frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}}+\frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}} \qquad (10.8)$$

επιτάχυνση $$\vec{\mathbf{a}} \equiv \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}}+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}}+\frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{z}}. \qquad (10.9)$$

Το διάνυσμα θέσης είναι ένα *δέσμιο διάνυσμα*, που έχει την αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος θέσης κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την *τροχιά* του σημείου P. Μπορεί να αποδειχθεί γεωμετρικά ότι το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\mathbf{v}}$ είναι εφαπτομενικό της τροχιάς σε κάθε της σημείο.

Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση ενός σώματος με σταθερή μάζα m διατυπώνεται διανυσματικά στις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} \qquad (10.10)$$

όπου $\vec{\mathbf{r}}$ είναι το διάνυσμα θέσης, $\vec{\mathbf{v}}$ η ταχύτητα και $\vec{\mathbf{a}}$ η επιτάχυνση του σώματος, και $\vec{\mathbf{F}}$ η *εξωτερική δύναμη* που ασκείται πάνω στο σώμα. Για να συμπεριληφθεί και το ενδεχόμενο της μεταβολής της μάζας με τον χρόνο, ο νόμος διατυπώνεται στη γενικότερη μορφή

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} , \qquad (10.11)$$

όπου $\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}}$ είναι η *ορμή* του σώματος. Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει όταν μια συγκεκριμένη συνάρτηση αντικατασταθεί για τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$, ονομάζεται *εξίσωση κίνησης* του σώματος. Η $\vec{\mathbf{F}}$ μπορεί να είναι σταθερή, ή συνάρτηση της θέσης, του χρόνου ή ακόμη και της ταχύτητας του σώματος.

Πρέπει να έχουμε πάντοτε υπόψη μας ότι κάθε μια από τις διανυσματικές αυτές εξισώσεις εμπεριέχει τρεις εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα. Έτσι, επειδή

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad \vec{\mathbf{v}} = \upsilon_x\hat{\mathbf{x}} + \upsilon_y\hat{\mathbf{y}} + \upsilon_z\hat{\mathbf{z}}, \quad \vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{x}} + a_y\hat{\mathbf{y}} + a_z\hat{\mathbf{z}},$$

$$\vec{\mathbf{p}} = p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{F}} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}},$$

οι διανυσματικές αυτές εξισώσεις μπορούν να αναλυθούν ως εξής:

$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}$	$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$	$m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}$	$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$
$ma_x = F_x$	$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F_x$	$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$	$\frac{dp_x}{dt} = F_x$
$ma_y = F_y$	$m\frac{d\upsilon_y}{dt} = F_y$	$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y$	$\frac{dp_y}{dt} = F_y$
$ma_z = F_z$	$m\frac{d\upsilon_z}{dt} = F_z$	$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$	$\frac{dp_z}{dt} = F_z$

Παράδειγμα 3

Ποια είναι η φυσική σημασία των αποτελεσμάτων του Παραδείγματος 1, αν το

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = (x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}}) + \upsilon_0 t\hat{\mathbf{x}} - \tfrac{1}{2}gt^2\hat{\mathbf{z}}$$

είναι το διάνυσμα θέσης μιας σημειακής μάζας και t ο χρόνος;

Η ταχύτητα της μάζας είναι: $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \upsilon_0\hat{\mathbf{x}} - gt\hat{\mathbf{z}}$

Η επιτάχυνσή της είναι: $\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -g\hat{\mathbf{z}}$

Οι αρχικές τιμές των τριών διανυσμάτων είναι:

$$\vec{\mathbf{r}}(0) = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}} \qquad \dot{\vec{\mathbf{r}}}(0) = \upsilon_0\hat{\mathbf{x}} \qquad \ddot{\vec{\mathbf{r}}}(0) = -g\hat{\mathbf{z}} .$$

Το $\vec{\mathbf{r}}(t)$ δίνει επομένως τη θέση της σημειακής μάζας, η οποία κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -g\hat{\mathbf{z}}$, και η οποία αρχικά βρίσκεται στο σημείο $\vec{\mathbf{r}}(0) = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}}$ και έχει αρχική ταχύτητα $\dot{\vec{\mathbf{r}}}(0) = \upsilon_0\hat{\mathbf{x}}$.

Παράδειγμα 4

Να δειχθεί ότι η κινητική ενέργεια ενός φορτισμένου σώματος που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο παραμένει σταθερή.

Αν το σώμα έχει φορτίο ίσο με Q και κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}$, η δύναμη που ασκείται πάνω του είναι

$$\vec{\mathbf{F}} = Q\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}\,.$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι $K = \frac{1}{2} M\upsilon^2 = \frac{1}{2} M\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$.

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} M\,\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} M\left[\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\cdot\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right] = M\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\,.$$

Όμως,
$$M\,\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} = Q\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}\,.$$

Επομένως,
$$\frac{dK}{dt} = M\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}\cdot(Q\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = 0$$

και η κινητική ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή.

Προβλήματα

1 Αν $\vec{\mathbf{r}}(t) = (3+t)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos 2t\,\hat{\mathbf{y}} + 2e^{-2t}\,\hat{\mathbf{z}}$, να βρεθούν τα $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$ και $\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \dfrac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}$, καθώς και οι αρχικές τιμές ($t=0$) $\vec{\mathbf{r}}(0)$, $\dot{\vec{\mathbf{r}}}(0)$ και $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(0)$ των τριών διανυσμάτων.

2 Δείξτε ότι η μάζα m της οποίας το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{\mathbf{r}}(t) = (a\,\hat{\mathbf{x}} + b\,\hat{\mathbf{y}}) + ct\,\hat{\mathbf{x}} + gt^2\,\hat{\mathbf{z}}$ κινείται κάτω από την επίδραση μιας σταθερής δύναμης.

3 Αν οι συνιστώσες μιας σημειακής μάζας m είναι

$$x = 3a\sin\omega t \qquad y = 4a\sin\omega t \qquad z = 5a\cos\omega t$$

όπου t είναι ο χρόνος και τα a και ω είναι θετικές σταθερές,

(α) Να βρεθούν: το διάνυσμα θέσης, η ταχύτητα και η επιτάχυνση της μάζας.
(β) Να βρεθούν τα μέτρα των τριών διανυσμάτων του (α).
(γ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξτε ότι είναι της μορφής $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο (0,0,0) και $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{r}}(t)$. Μια τέτοια δύναμη ονομάζεται *κεντρική*.
(δ) Δείξτε ότι η μάζα κινείται πάνω σε ένα σταθερό επίπεδο και ότι η τροχιά της είναι κύκλος με κέντρο το σημείο (0,0,0) και ακτίνα ίση με $5a$. Σχεδιάστε την τροχιά στο χώρο.
(ε) Δείξτε ότι η *στροφορμή* της μάζας $\vec{\mathbf{L}} \equiv m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$ ως προς το σημείο (0,0,0) (όπου $\vec{\mathbf{v}}$ είναι η ταχύτητα της μάζας) είναι σταθερή και ίση με $\vec{\mathbf{L}} = ma^2\omega(-20\,\hat{\mathbf{x}} + 15\,\hat{\mathbf{y}}) = ma\upsilon\left(-\frac{4}{5}\hat{\mathbf{x}} + \frac{3}{5}\hat{\mathbf{y}}\right)$, ή $\vec{\mathbf{L}} = ma\upsilon\,\hat{\mathbf{L}}$. Αυτή είναι ιδιότητα όλων των σωμάτων που κινούνται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης.

4 Η *στροφορμή* ως προς το σημείο (0,0,0) μιας μάζας m που βρίσκεται στο σημείο $\vec{\mathbf{r}}$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$, ορίζεται ως $\vec{\mathbf{L}} \equiv m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Έστω ότι η μάζα υφίσταται μια *κεντρική* δύναμη, δηλαδή μια δύναμη της μορφής $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο (0,0,0) και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{r}}(t)$.

Δείξτε ότι η στροφορμή της μάζας διατηρείται σταθερή. [Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το χρόνο είναι $d\vec{\mathbf{L}}/dt = 0$. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήστε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $m\,d\vec{\mathbf{v}}/dt = \vec{\mathbf{F}}$. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο C. Kittel κ.ά., "Μηχανική".]

5 Η στροφορμή $\vec{\mathbf{L}}$ ενός σώματος ορίζεται όπως στο προηγούμενο πρόβλημα. Αν η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα είναι $\vec{\mathbf{F}}$, δείξτε ότι είναι $\dfrac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}}$, όπου $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ είναι η ροπή της δύναμης ως προς το ίδιο σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται και η στροφορμή.

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998. Κεφ. 2, 3.

I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001. Κεφ. 4.

M. R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1982. Κεφ. 7.

M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Vector Analysis*. Schaum Publishing Co. 1959 κ.ε.